SIMULASI SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA ORDE TINGGI DENGAN METODE RUNGE- KUTTA -FEHLBERG DAN MODIFIKASI EULER

Hery Andi Sitompul dan Enzo W. B. Siahaan

Dosen LLDikti Wilayah 1 Dpk Universitas Darma Agung, Medan[1,2]
Jl. DR.TD.Pardede No 21, Medan 20135, Sumatera Utara

herystpl@gmail.com[1], *Enzo.battra84@gmail.com*[2]

Abstrak

Metode Modifikasi Euler dan Runge-Kutta-Fehlberg yang pada umumnya digunakan untuk menentukan solusi persamaan diferensial biasa orde satu secara numerik. Dalam kajian ini akan dilakukan simulasi untuk mengaplikasikan kedua metode tersebut untuk menentukan solusi numerik persamaan diferensial orde tinggi melalui beberapa contoh. Diperoleh bahwa kedua metode tersebut dapat mendekati solusi eksak dengan baik, dan Metode Runge-Kutta-Fehlberg memberikan hasil yang lebih baik berdasarkan rata – rata persentase galat yang dihasilkan.

Kata Kunci : Modifikasi Euler, Runge-Kutta-Fehlberg, Numerik , Persamaan Diferensial

Abstract

Modified Euler and Runge-Kutta-Fehlberg methods are generally used to determine solutions to first order ordinary differential equations numerically. In this study, simulations will be carried out to apply these two methods to determine numerical solutions to higher order differential equations through several examples. It was found that both methods can approach the exact solution well, and the Runge-Kutta-Fehlberg method provides better results based on the average percentage of error produced.

Key Word : *Modified Euler, Runge- Kutta-Fehlberg, Numeric, Differential Equation*

1. Pendahuluan

1.1. Latar Belakang

Solusi numerik dari persamaan diferensial biasa terutama orde satu sudah sangat luas dikaji oleh para ilmuwan dan mengembangkan berbagai metode untuk menentukan pendekatan solusi eksak. Beberapa diantarnya adalah metode Euler dan Modifikasi Euler, Runge Kutta dan Runge Kuttta Fehlberg.

Berdasarkan Richard.L.Burdens *and* J.Douglas Faires, J.D (2011). bahwa metode Runge Kutta orde 4 dapat diaplikasikan pada persamaan diferensial biasa orde tinggi dengan cara mereduksinya mejadi sebuah sistem persamaan diferensial orde satu. Hal yang sama jika dilakukan dengan metode yang lain kemungkinan akan memberikan hasil yang sama. Oleh karena itu dalam tulisan ini akan dilakukan simulasi metode numerik orde satu yang lain untuk diaplikasikan pada persamaan diferensial orde lebih tinggi.

Kajian ini terbatas hanya melakukan simulasi numerik pada beberapa kasus persamaan diferensial biasa orde tinggi.

1.2. Maksud dan Tujuan

Kajian atau tulisan ini dimaksudkan untuk melakukan simulasi untuk solusi numerik persamaan diferensial biasa orde tinggi dengan metode Runge Kutta Fehlberg dan Modifikasi Euler . Adapun tujuan dari tulisan ini adalah :

1. Mendapatkan solusi numerik dari persamaan diferensial biasa orde tinggi dengan metode Modifikasi Euler.
2. Mendapatkan solusi numerik dari sebuah persamaan diferensial biasa orde tinggi dengan metode Runge Kutta Fehlberg.
3. Melakukan perbandingan hasil simulasi antara metode Modifikasi Euler dengan metode Runge Kutta. Fehlberg dan solusi eksak.

2. Landasan Teori

2.1. Persamaan Diferensail Biasa Orde Tinggi

Bentuk umum persamaan diferensial biasa orde tinggi :

Misalkan $y^{(n)}(t) = \frac{d^n y}{dt^n}$ dimana $y(t)$ adalah solusi dari persamaan diferensial : $y^n(t) = f\left(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right)$

Dengan nilai awal :

$$y(0) = \alpha_0 \,, y'(0) = \alpha_1, y''(0) = \alpha_2, \dots, y^{(n-1)}(0) = \alpha_{n-1}$$

2.2.Metode Runge Kutta Fehlberg

Metode Runge-Kutta-Fehlberg merupakan sebuah algoritma dalam analisis numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa orde satu yang dikembangkan oleh ilmuwan jerman Erwin Fehlberg sebagai pembaruan dari metode Runge Kutta orde 4.

Misalkan sebuah persamaan diferensial biasa : $y'(t) = f(t, y(t))$ dengan nilai awal $y(0) = y_0$ secara numerik akan dihampiri solusi persamaan diferensial $y(t)$ pada selang $a \le t \le b$. Dengan membagi interval menjadi N subinterval hingga $t_i = a + hi, i = 0,1, \cdots, N$ dimana $h = \frac{b-a}{N}$ yang disebut dengan ukuran langkah. Keluarga dari metode Runge -Kutta - Fehlberg adalah :

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56340}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5$$

Dimana :

$$k_1 = hf(t_i, y_i)$$

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{4}, y_i + \frac{1}{4}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{3h}{8}, y_i + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right)$$

$$k_4 = hf\left(t_i + \frac{12h}{13}, y_i + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\right)$$

$$k_5 = hf\left(t_i + h, y_i + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right)$$

$$k_6 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1858}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right)$$

2.3.Metode Modifikasi Euler

Metode Modifikasi Euler merupakan pengembangan dari metode Euler dengan tujan untuk melakukan koreksi pada galat yang diperoleh pada metode Euler. Metode Euler pertama kali dikembangkan oleh ilmuwan jerman Leonhard Euler dan merupakan sebuah metode paling mendasar untuk mendekati solusi dari persamaan diferensial biasa orde satu. Maksud dari metode Euler adalah untuk mendekati solusi dari sebuah persamaan diferensial biasa orde satu dengan masalah nilai awal yang diberikan dengan jelas.

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), y(a) = y_0, a \leq t \leq b$$

Dengan membagi interval $a \leq t \leq b$ menjadi n subinterval sedemikian hingga :
$t_i = a + ih$, untuk setiap $i = 1,2, \ldots, n$
Dengan $h = \frac{b-a}{n}$ yang disebut dengan ukuran langkah. Maka pendekatan solusi $y(t)$ dilakukan dengan :

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y_i)$$

Sedangkan metode Modifikasi Euler melakukan pendekatan solusi $y(t)$ dilakukan dengan :

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \frac{h}{2}[f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})]$$

$$\tilde{y}_{i+1} = y(t_i) + hf(t_i, y_i)$$

3. Metodologi Penelitian

Misalkan persamaan diferensial biasa orde n dengan masalah nilai awal yang diberikan dengan jelas :

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right), a \leq t \leq b$$

Dengan
$y(a) = \alpha_0, y'(a) = \alpha_1, y''(a) = \alpha_2, \ldots, y^{(n-1)}(a) = \alpha_{n-1}$.
Simulasi numerik dengan metode Modfikasi Euler dan Runge-Kutta-Fehlberg dilakukan dengan mereduksi persamaan diferensial orde n menjadi sebuah sistem persamaan diferensial orde satu :
Misalkan : $y_1 = y$ maka $y_1(a) = y(a) = \alpha_0$
$y_2 = y_1'$, $y_2(a) = y'(a) = \alpha_1$
$y_3 = y_2'$; $y_3(a) = y''(a) = \alpha_2$
.
$y_n = y_{n-1}'$, $y_n(a) = y^{(n-1)}(a) = \alpha_{n-1}$
Sehingga :

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(t, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}), a \leq t \leq b$$

Pada Metode Modifikasi Euler simulasi dilakukan dengan cara :

$$y_1(t_{i+1}) = y_1(t_i) + \frac{h}{2}\left[f_1\left(t_i, y_{1,i}\right) + f_1\left(t_{i+1}, \tilde{y}_{1,i+1}\right)\right]$$

$$\tilde{y}_{1,i+1} = y_1(t_i) + hf_1\left(t_i, y_{1,i}\right)$$

$$y_2(t_{i+1}) = y_2(t_i) + \frac{h}{2}\left[f_2\left(t_i, y_{2,i}\right) + f_2\left(t_{i+1}, \tilde{y}_{2,i+1}\right)\right]$$

$$\tilde{y}_{2,i+1} = y_2(t_i) + hf_2\left(t_i, y_{2,i}\right)$$

.
.
.

$$y_n(t_{i+1}) = y_n(t_i) + \frac{h}{2}\left[f_n\left(t_i, y_{n,i}\right) + f_n\left(t_{i+1}, \tilde{y}_{n,i+1}\right)\right]$$

$$\tilde{y}_{n,i+1} = y_n(t_i) + hf_n\left(t_i, y_{n,i}\right)$$

$$i = 1,2, \ldots, m$$

m adalah jumlah langkah hingga $t_m = b$, n adalah jumlah persamaan diferensial orde satu yang direduksi dari oersamaan diferensial orde n.
Dengan konsep yang sama pada metode Runge-Kutta-Fehlberg simulasi dilakukan dengan cara :

$$\tilde{y}_{j,i+1} = y_{j,i} + \frac{16}{135}k_{1,j} + \frac{6656}{12825}k_{3,j} + \frac{28561}{56340}k_{4,j} - \frac{9}{50}k_5, j + \frac{2}{55}k_6, j$$

$$y_{j,i+1} = y_{j,i} + \frac{25}{216}k_{1,j} + \frac{1408}{2565}k_{3,j} + \frac{2197}{4104}k_{4,j} - \frac{1}{5}k_{5,j}$$

Dimana :

$$k_{1,j} = hf_j(t_i, y_i)$$

$$k_{2,j} = hf_j\left(t_i + \frac{h}{4}, y_i + \frac{1}{4}k_{1,j}\right)$$

$$k_{3,j} = hf_j\left(t_i + \frac{3h}{8}, y_{j,i} + \frac{3}{32}k_{1,j} + \frac{9}{32}k_{2,j}\right)$$

$$k_{4,j} = hf_j\left(t_i + \frac{12h}{13}, y_{j,i} + \frac{1932}{2197}k_{1,j} - \frac{7200}{2197}k_{2,j} + \frac{7296}{2197}k_{3,j}\right)$$

$$k_{5,j} = hf_j\left(t_i + h, y_{j,i} + \frac{439}{216}k_{1,j} - 8k_{2,j} + \frac{3680}{513}k_{3,j} - \frac{845}{4104}k_{4,j}\right)$$

$$k_{6,j} = hf_j\left(t_i + \frac{h}{2}, y_{j,i} - \frac{8}{27}k_{1,j} + 2k_{2,j} - \frac{3544}{2565}k_{3,j} + \frac{1858}{4104}k_{4,j} - \frac{11}{40}k_{5,j}\right)$$

$$j = 1,2,\dots,n$$

$$i = 1,2,\dots,m$$

4. Pembahasan dan Hasil

Simulasi numerik akan diterapkan pada 3 kasus yaitu persamaan diferensial biasa orde 2 dan orde 3.Semua perhitungan pada kasus ini dilakukan dengan bantuan Matlab.

Contoh 1. Tentukan solusi numerik dari persamaan diferensial : $y'' - 2y' + 2y = e^{2t}sint, 0 \le t \le 1$ dengan nilai awal $y(0) = -0{,}4, y'(0) = -0{,}6$, dan $h = 0.1$.dimana solusi eksak adalah : $y(t) = \frac{1}{5}e^{2t}(sint - cos2t)$.

Penyelesaian.

$$y'' = 2y' - 2y + e^{2t}sint$$

Misalkan $y_1 = y(t)$ dan $y_2 = y'(t)$, maka persamaan ditransformasi menjadi sebuah sistem persamaan :

$$y_1'(t) = y_2(t)$$

$$y_2'(t) = 2y_2 - 2y_1 + e^{2t}sint$$

$$f_1(t, y) = y_2(t)$$

$$f_2(t, y) = 2y_2 - 2y_1 + e^{2t}sint$$

Dengan nilai awal :

$$y_1(0) = -0{,}4 , y_2(0) = -0{,}6$$

Hasil perhitungan secara numerik dengan metode Modifikasi Euler :

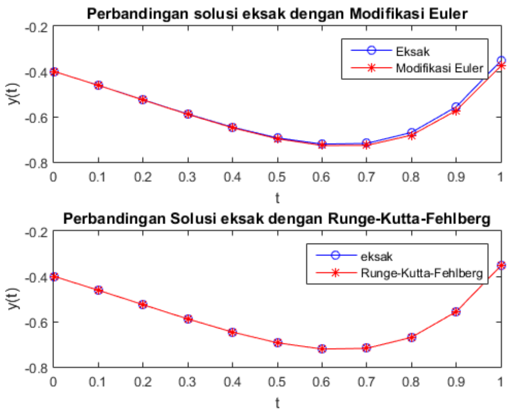
t	Eksak $y(t)$	Mod.Euler $y(t)$	ε	$\lvert\varepsilon\rvert$
0	-0.4000	-0.4000	0	0
0.1	-0.4617	-0.4620	-0.0003	0.0003
0.2	-0.5256	-0.5263	-0.0007	0.0007
0.3	-0.5886	-0.5900	-0.0014	0.0014
0.4	-0.6466	-0.6491	-0.0025	0.0025
0.5	-0.6936	-0.6975	-0.0039	0.0039
0.6	-0.7211	-0.7271	-0.0059	0.0059
0.7	-0.7181	-0.7268	-0.0087	0.0087
0.8	-0.6697	-0.6819	-0.0122	0.0122
0.9	-0.5564	-0.5733	-0.0168	0.0168
1	-0.3534	-0.3761	-0.0227	0.0227

Tabel 1. Perbandingan solusi eksak dan solusi Modifikasi Euler contoh 1.

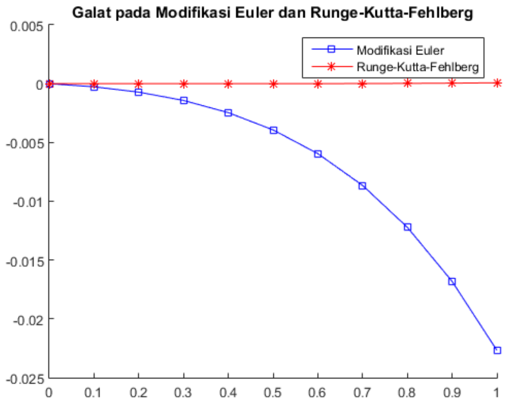
Hasil perhitungan secara numerik dengan metode Runge-Kutta-Fehlberg (RKF):

t	Eksak $y(t)$	RKF y(t)	ε	$\lvert\varepsilon\rvert$
0	-0.4000	-0.4000	0	0
0.1	-0.4617	-0.4620	-0.0000	0.0000
0.2	-0.5256	-0.5256	-0.0000	0.0000
0.3	-0.5886	-0.5886	-0.0000	0.0000
0.4	-0.5886	-0.5886	0.0000	0.0000
0.5	-0.5886	-0.5886	0.0000	0.0000
0.6	-0.5886	-0.5886	0.0000	0.0000
0.7	-0.7181	-0.7181	0.0000	0.0000
0.8	-0.6697	-0.6697	0.0000	0.0000
0.9	-0.5564	-0.5564	0.0000	0.0000
1	-0.3534	-0.3533	0.0001	0.0001

Tabel 2. Perbandingan solusi eksak dan solusi Runge-Kutta-Fehlberg contoh 1.



Gambar 1. Perbandingan solusi eksak dan solusi Numerik contoh 1



Gambar 2. Galat pada solusi numerik contoh 1

Contoh 2. Tentukan solusi numerik dari persamaan diferensial : $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0, 0 \leq t \leq 2$ dengan nilai awal $y(0) = 3, y'(0) = -1, y''(0) = 9,$ dan $h = 0.2$.dimana solusi eksak adalah : $y(t) = e^{-t} + e^{2t} + e^{-2t}$.

Penyelesaian.

$y''' = -y'' + 4y' + 4y$

Misalkan $y_1 = y(t)$ dan $y_2 = y'(t)$, $y_3 = y''(t)$ maka persamaan ditransformasi menjadi sebuah sistem persamaan :

$$y_1'(t) = y_2(t)$$
$$y_2' = y_3(t)$$
$$y_3'(t) = -y_3 + 4y_2 + 4y_1$$
$$f_1(t, y) = y_2(t)$$
$$f_2(t, y) = y_3(t)$$
$$f_3 = -y_3 + 4y_2 + 4y_1$$

Hasil perhitungan secara numerik dengan metode Modifikasi Euler :

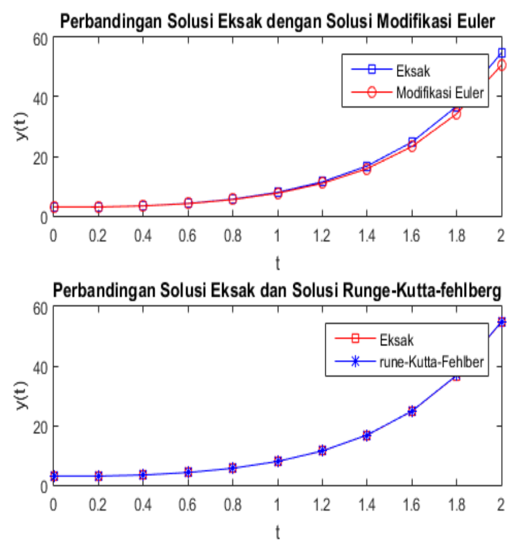
t	Eksak $y(t)$	Mod.Euler $y(t)$	ε	$\lvert\varepsilon\rvert$
0	3.0000	3.0000	0	0
0.2	2.9809	2.9842	-0.0033	0.0033
0.4	3.3452	3.3252	0.0200	0.0200
0.6	4.1701	4.1076	0.0625	0.0625
0.8	5.6043	5.4638	0.1405	0.1405
1.0	7.8923	7.6170	0.2753	0.2753
1.2	11.4151	10.9121	0.5030	0.5030
1.4	16.7521	15.8702	0.8819	0.8819
1.6	24.7752	23.2695	1.5057	1.5057
1.8	36.7909	34.2674	2.5235	2.5235
2	54.7518	50.5802	4.1716	4.1716

Tabel 3. Perbandingan solusi eksak dan solusi Modifikasi Euler contoh 2.

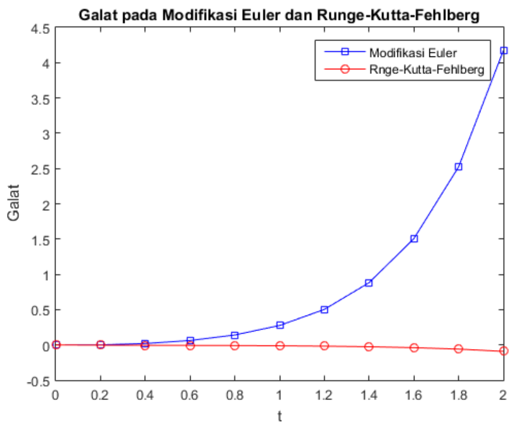
Dengan metode Runge-Kutta-Fehlberg :

t	Eksak (yt)	RKF $y(t)$	ε	$\lvert\varepsilon\rvert$
0	3.0000	3.0000	0	0
0.2	2.9809	2.9800	0.0009	0.0009
0.4	3.3452	3.3506	-0.0054	0.0054
0.6	4.1701	4.1772	-0.0070	0.0070
0.8	5.6043	5.6134	-0.0091	0.0091
1.0	7.8923	7.9046	-0.0124	0.0124
1.2	11.4151	11.4326	-0.0176	0.0176
1.4	16.7521	16.7779	-0.0259	0.0259
1.6	24.7752	24.8142	-0.0390	0.0390
1.8	36.7909	36.8504	-0.0596	0.0596
2	54.7518	54.8433	-0.0915	0.0915

Tabel 4. Perbandingan solusi eksak dan solusi Runge-Kutta-Fehlberg contoh 2.



Gambar 3. Perbandingan solusi eksak dan solusi Numerik contoh 2



Gambar 4. Galat pada solusi numerik contoh 2.

Contoh 3. Tentukan solusi numerik dari persamaan diferensial : $y''' - ty'' + t^2 y = tsint - cost + t^2 sin^2 t, 0 \le t \le 1$, dengan nilaia awal :$y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0$,. Dimana soulsi eksak adalah :$y(t) = sint$

Hasil perhitungan secara numerik dengan metode Modifikasi Euler :

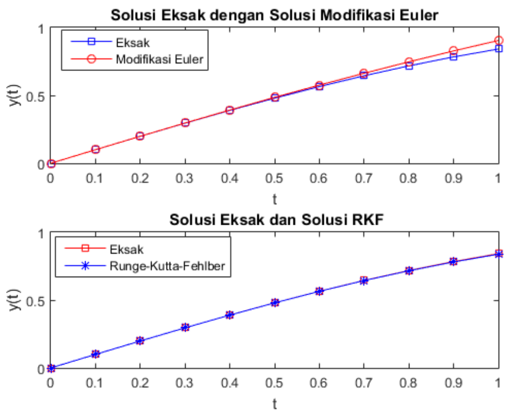
t	Eksak $y(t)$	Mod.Euler $y(t)$	ε	$\lvert\varepsilon\rvert$
0	0	0	0	0
0.2	0.0998	0.1000	-0.0002	0.0002
0.4	0.1987	0.1990	-0.0003	0.0003
0.6	0.2955	0.2965	-0.0010	0.0010
0.8	0.3894	0.3921	-0.0027	0.0027
1.0	0.4794	0.4853	-0.0059	0.0059
1.2	0.5646	0.5757	-0.0111	0.0111
1.4	0.6442	0.6631	-0.0189	0.0189
1.6	0.7174	0.7471	-0.0297	0.0297
1.8	0.7833	0.8275	-0.0442	0.0442
2	0.8415	0.9043	-0.0628	0.0628

Tabel 5. Perbandingan solusi eksak dan solusi Modifikasi Euler contoh 3.

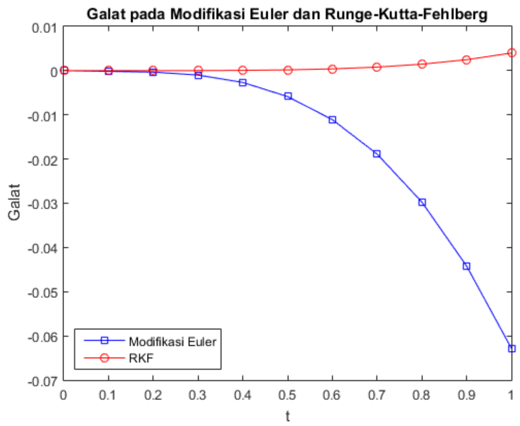
Hasil perhitungan secara numerik dengan metode Runge-Kutta-Fehlberg (RKF):

t	Eksak $y(t)$	RKF $y(t)$	ε	$\lvert\varepsilon\rvert$
0	0	0	0	0
0.2	0.0998	0.0998	0.0000	0.0000
0.4	0.1987	0.1987	0.0000	0.0000
0.6	0.2955	0.2955	0.0000	0.0000
0.8	0.3894	0.3894	0.0001	0.0001
1.0	0.4794	0.4793	0.0002	0.0002
1.2	0.5646	0.5642	0.0004	0.0004
1.4	0.6442	0.6434	0.0008	0.0008
1.6	0.7174	0.7159	0.0015	0.0015
1.8	0.7833	0.7808	0.0025	0.0025
2	0.8415	0.8375	0.0040	0.0040

Tabel 5. Perbandingan solusi eksak dan solusi RKF contoh 3.



Gambar 5. Perbandingan solusi eksak dan solusi Numerik contoh 3



Gambar 4. Galat pada solusi numerik contoh 3.

Dari perhitungan secara numerik pada contoh kasus 1, 2, dan 3 yang disajikan dalam tabel dan plot grafik solusi eksak banding solusi numerik diatas dapat dilihat bahwa pada metode Modifikasi Euler galat akan semakin membesar seiring dengan langkah waktu, sedangkan pada metode Runge-Kutta-Fehlberg galat bergerak secara acak dan sangat stabil. Pada contoh 2 misalnya, solusi eksak yang bergerak secara eksponensial pada metode Modifikasi Euler galat semakin cepat membesar dan solusi numerik bergerak menjauhi solusi eksak tetapi pada metode Runge-Kutta-Fehlberg galat tetap bergerak stabil dan solusi numerik tetap menempel solusi eksak.

Berikut adalah data yang diperoleh dari perhitungan secara numerik :

Contoh	Metode					
	Modifikasi Euler			RKF		
	Maks ε(%)	Min ε(%)	Rata Rata ε(%)	Maks ε(%)	Min ε(%	Rata Rata ε(%)
1	2.26	0	0.68	0.007	0	0.001
2	7.61	0	5.88	0.16	0	0.15
3	8.02	0	1.60	0.47	0	0.08

Tabel 7. Data Performa Kedua Metode

Data diatas menunjukkan bahwa kedua metode dapat mendekati solusi eksak dengan sangat baik, hal ini dapat dilihat dari atribut performa yang dihasilkan oleh kedua metode untuk ketiga kasus yang diberikan sangat baik.

5. Kesimpulan

Tiga contoh sudah disajikan dalam kajian ini dan solusi numerik persamaan diferensial biasa orde tinggi sudah diperoleh, dari hasil perhitungan secara numerik dapat disimpulkan bahwa kedua metode dapat diaplikasikan dengan sangat baik untuk persamaan diferensial biasa orde tinggi. Diantara kedua metode yang telah disimulasikan terlihat bahwa metode Runge-Kutta-Fehlberg memiliki performa yang lebih baik.

Daftar Pustaka

Burden, R.L., Faires, J.D (2005). *Numerical Analysis. Boundary-Value Problems for Ordinary Differential Equations*, Belmount: Thomson Brooks/Cole

J.C. Butcher. (2008). *Numerical Method for Ordinary Differential Equation.* Second Edition, John Wiley & Sons

Richard.L.Burdens and J.Douglas Faires, J.D (2011). *Numerical Analysis.ninth edition* Brooks/Cole, Cengage Learning.